

СТОПАНСКА АКАДЕМИЯ „Д. А. Ценов“
Факултет „ФИНАНСИ“
Катедра „Финанси и кредит“

ПРИМЕРНИ ЗАДАЧИ ПО КУРСА
„ИНВЕСТИЦИИ“

Гл. ас. д-р Цветан Павлов

Съдържание

I. Оценка на инвестиции в реални активи	2
II. Статистически измерители на проектния риск	5
III. Оценка на акции	6
IV. Инвестиции в облигации	8
V. Портфейлна теория.....	13
VI. Опции	17
Приложение №1.....	21

(Заб. Разгледаните задачи обхващат основни моменти, но не и целия учебен материал, който може да бъде включен в изпитния тест. Формулният апарат, философията на моделите и ситуациите, в които следва да се използват в практиката, са развити в академичния учебник и лекционен учебен материал с автор доц. д-р Стоян Проданов)

I. Оценка на инвестиции в реални активи

Пример 1: Използвайки нетната сегашна стойност (**NPV**) с дисконтова норма от 10%, оценете инвестиционния проект, имащ следните парични потоци:

t	CF
t ₀	-30 000
t ₁	7000
t ₂	14000
t ₃	17000

☺ *Решение:*

$$NPV_{10\%} = \frac{7\,000}{(1+0,1)} + \frac{14\,000}{(1+0,1)^2} + \frac{17\,000}{(1+0,1)^3} - 30\,000 = 706,24 \text{ лв.}$$

Пример 2: Използвайки вътрешната норма на възвръщаемост (**IRR**), оценете инвестиционния проект, генериращ следните парични потоци:

t	CF
t ₀	-13 000
t ₁	4000
t ₂	6000
t ₃	7000

☺ *Решение:* За извеждането на вътрешната норма на възвръщаемост, без помощта на софтуер, е необходимо с два дисконтови процента (*a* и *c*) да намерим две NPV-та, максимално близки до нула. При единия процент (*a*) NPV трябва да е положително (A), а при другия (*c*) NPV да е отрицателно (C). Между тези две NPV-та, ще е процентът, при който NPV=0, т.е. IRR – доходността, която носи проектът. Чрез интерполация извеждаме точния процент между *a* и *c*.

За да достигнем до необходимите дисконтови проценти, при които NPV да е положително и съответно отрицателно, се преминава през процедура „проба-грешка“. В зависимост от получения резултат се ориентираме в каква посока да се промени дисконтовият процент – ако NPV е положително, увеличаваме процента и обратно, като стъпката на промяна в дисконтовия процент определяме спрямо номиналното изражение на полученото NPV (до колко е близко до 0). Типично процедурата отнема 3-4 тестови процента, с които да се изчисли NPV.

Етап 1. Намираме NPV със случаен процент, случая пробваме с 10%:

$$NPV_{10\%} = \frac{4\,000}{(1+0,1)} + \frac{6\,000}{(1+0,1)^2} + \frac{7\,000}{(1+0,1)^3} - 13\,000 = 854,245 \text{ лв.}$$

Етап 2. Извеждане на A, C , а и c в зависимост от получения резултат от Етап 1.

В този случай е необходимо увеличение на процента с по-голяма стъпка:

$$NPV_{14\%} = \frac{4\,000}{(1+0,14)} + \frac{6\,000}{(1+0,14)^2} + \frac{7\,000}{(1+0,14)^3} - 13\,000 = -149,622 \text{ лв.} \Rightarrow (C)$$

Колкото диапазонът между процентите (a и c) е по-голям, толкова и грешката (отклонението) от точния резултат ще е по-голяма. За целите на изпита диапазон до 4% е приемлива. Препоръчваме обаче да се използва 1% разлика:

$$NPV_{13\%} = \frac{4\,000}{(1+0,13)} + \frac{6\,000}{(1+0,13)^2} + \frac{7\,000}{(1+0,13)^3} - 13\,000 = 90,054 \text{ лв.} \Rightarrow (A)$$

Етап 3. Изчисление на IRR чрез интерполация:

$$\frac{A}{A-C} = \frac{x}{c-a} \Rightarrow \frac{90,054}{90,054 - (-149,622)} = \frac{x}{0,14 - 0,13}$$

$$\Rightarrow x = 0,003757$$

$$\Rightarrow \text{оттук } IRR = 0,13 + 0,003757 = 13,38\%$$

Пример 3: Определете модифицираната вътрешна норма на възвръщаемост (MIRR) на инвестиционен проект със следните парични потоци:

t	CF
t_0	-20 000
t_1	6000
t_2	15 000
t_3	13 300

Реинвестиционният процент (RR) е 8%:

☺ Решение:

$$20\,000 = \frac{6\,000(1+0,08)^2 + 15\,000(1+0,08) + 13\,300}{(1+MIRR)^3} =$$

$$20\,000 = \frac{36\,498,40}{(1+MIRR)^3} =$$

$$(1+MIRR)^3 = \frac{36\,498,40}{20\,000} =$$

$$MIRR = \sqrt[3]{1,82492} - 1 =$$

$$MIRR = 22,2\%$$

Пример 4: Изчислете дисконтовия период на изплащане (DPP) на инвестиционен проект със следните парични потоци:

t	CF
t_0	-20 000
t_1	6000
t_2	15 000
t_3	13 300

Дисконтовият процент (k) е 11%.

☺ *Решение:*

t	CF	Дисконтирани DCF (CFi)	Акумулиран паричен поток CFi-x
t ₀	-20 000	-20 000	-20 000
t ₁	6000	5 405,405	-14 594,595
t ₂	15 000	12 174,336	-2 420,258
t ₃	13 300	9 724,845	7 304,587

$$DPP = 2 + \frac{9\,724,845 - 7\,304,587}{9\,724,845} = 2,25 \text{ години}$$

Пример 5: Оценете инвестиционния проект, генериращ следните парични потоци:

t	CF
t ₀	-20 000
t ₁	5 450
t ₂	7 500
t ₃	10 750

Дисконтовият процент (k) е 8%, а реинвестиционният процент (RR) е 6%.

☺ *Решение:*

$$NPV_{8\%} = 5450/(1+0,08) + 7500/(1+0,08)^2 + 10750/(1+0,08)^3 - 20000 = 10,034 \text{ лв.}$$

$$NPV_{8\%} = 10,034 \text{ лв. (A)}$$

$$NPV_{9\%} = 5450/(1+0,09) + 7500/(1+0,09)^2 + 10750/(1+0,09)^3 - 20000 = -386,428 \text{ лв. (C)}$$

$$IRR = 0,08 + 10,034 / (10,034 + 386,428) \times (0,09 - 0,08) = 0,0802 \text{ (8,02\%)}$$

$$MIRR = [(5450 \times (1+0,06)^{(3-1)} + 7500 \times (1+0,06)^{(3-2)} + 10750 \times (1+0,06)^{(3-3)}) / 20000]^{(1/3)} - 1 = (24823,62 / 20000)^{(1/3)} - 1 = (1,241181)^{(1/3)} - 1 = 0,0747 \text{ (7,47\%)}$$

$$PI_{8\%} = 20010,034 / 20000 = 1,0005$$

$$PP = 2 + (10750 - 3700) / 10750 = 2,66 \text{ години}$$

$$DPP = 2 + (8533,6966 - 10,034) / 8533,6966 = 2,999 \text{ години}$$

II. Статистически измерители на проектния риск

Пример 1: Оценете риска на следния проект:

NPV (Xn)	Вероятност (Pn)
30 000	20%
17 000	70%
-12 000	10%

☺ Решение:

NPV, Xn	Pn	PnXn	Xn-EV(x)	[Xn-EV(x)]^2	Pn[Xn-EV(x)]^2
30 000	20%	6 000	13 300	176 890 000	35 378 000
17 000	70%	11 900	300	90 000	63 000
-12 000	10%	-1 200	-28 700	823 690 000	82 369 000
	EV (Σ PnXn) =	16700		σ²(Σ Pn[Xn-EV(x)]^2) =	117 810 000,00
				σ (√σ²) =	10 854,03

$$CV = \frac{\sigma_{(x)}}{EV_{(x)}} = \frac{10\,854,03}{16\,700} = 0,6499$$

Пример 2: Оценете риска на инвестиционния проект по отношение на PI:

PI (Xn)	Вероятност (Pn)
1,45	20%
1,13	45%
0,53	35%

☺ Решение:

CF, Xn	Pn	PnXn	Xn-EV(x)	[Xn-EV(x)]^2	Pn[Xn-EV(x)]^2
1,450	0,200	0,290	0,466	0,217	0,043
1,130	0,450	0,509	0,146	0,021	0,010
0,530	0,350	0,186	-0,454	0,206	0,072
	EV (Σ PnXn) =	0,984		σ²(Σ Pn[Xn-EV(x)]^2) =	0,125
				σ (√σ²) =	0,354

$$CV = \frac{\sigma_{(x)}}{EV_{(x)}} = \frac{0,354}{0,984} = 0,3595$$

III. Оценка на акции

Пример 1: Определете стойността на една акция на фирма „XYZ”, чийто последен дивидент е 2,20 лв. Очаква се тригодишен период на свръхрастеж от 10%, следван от нормален растеж от 2% годишно. Изискуемата норма на възвръщаемост на акционерите (k) е 13%.

☺Решение:

Етап 1. Изчисляване на бъдещите дивиденди през периода на свръхрастеж:

$$D_0 = 2,20 \text{ лв.}$$

$$D_1 = 2,20 (1 + 0,1) = 2,42 \text{ лв.}$$

$$D_2 = 2,20 (1 + 0,1)^2 = 2,662 \text{ лв.}$$

$$D_3 = 2,20 (1 + 0,1)^3 = 2,928 \text{ лв.}$$

Етап 2. Извеждане на сегашна стойност на акцията в периода на свръхрастеж (V_{os}):

$$V_{os} = \frac{2,42}{(1+0,13)} + \frac{2,662}{(1+0,13)^2} + \frac{2,928}{(1+0,13)^3} = 6,256 \text{ лв.}$$

Етап 3. Определяне на първия дивидент от периода на нормален растеж:

$$D_{s+1} = 2,928 (1 + 0,02) = 2,987 \text{ лв.}$$

Етап 4. Извеждане на сегашна стойност на акцията в периода на нормален растеж (V_{on}):

$$V_{on} = \frac{2,987}{(0,13 - 0,02) \times (1 + 0,13)^3} = 18,819 \text{ лв.}$$

Етап 5. Изчисляване на справедливата стойност на акцията:

$$P = V_{os} + V_{on} = 6,256 + 18,819 =$$

$$P = 25,08 \text{ лв.}$$

Пример 2: Определете стойността на една акция на фирма „XYZ”, чиито последен дивидент 1,45 лв. Очаква се четиригодишен период на свръхрастеж от 6,12%, следван от нормален растеж от 1,7% годишно. Изискуемата норма на възвръщаемост на акционерите е 13%.

☺Решение:

Етап 1. Изчисляване на бъдещите дивиденди през периода на свръхрастеж:

$$D_1 = 1,45 \times 1,0612 = 1,5387$$

$$D_2 = 1,45 \times 1,0612^2 = 1,6329$$

$$D_3 = 1,45 \times 1,0612^3 = 1,7328$$

$$D_4 = 1,45 \times 1,0612^4 = 1,8389$$

Етап 2. Извеждане на сегашна стойност на акцията в периода на свръхрастеж (V_{os}):

$$V_{os} = 1,5387/(1+0,13) + 1,6329/(1+0,13)^2 + 1,7328/(1+0,13)^3 + 1,8389/(1+0,13)^4 = 1,3617 + 1,2788 + 1,2009 + 1,1278 = 4,9692.$$

Етап 3. Определяне на първия дивидент от периода на нормален растеж:

$$\text{Div}_{5+1} = 1,8389 \times (1+0,017) = 1,8702 \text{ лв.}$$

Етап 4. Извеждане на сегашна стойност на акцията в периода на нормален растеж (V_{on}):

$$V_{on} = 1,8702 / ((0,13-0,017) \times (1+0,13)^4) = 10,1507 \text{ лв.}$$

Етап 5. Изчисляване на справедливата стойност на акцията:

$$P = 1,8702 + 10,1507 = 15,12 \text{ лв.}$$

Пример 3: Изчислете стойността на привилегировани акции с номинал 100 лв. и дивидентна доходност от 8 %. Изискуема доходност на акционерите е 12,5%.

☺*Решение:*

$$\text{Div} = 100 \times 0,08 = 8 \text{ лв.}$$

$$P = \text{Div}/k = 8/0,125 = 64 \text{ лв.}$$

Пример 4: Изчислете стойността на привилегировани акции с номинал 88 лв. и дивидентна доходност от 5 %. Изискуема доходност на акционерите е 14%.

☺*Решение:*

$$\text{Div} = 88 \times 0,05 = 4,4 \text{ лв.}$$

$$P = \text{Div}/k = 4,4/0,14 = 31,43 \text{ лв.}$$

IV. Инвестиции в облигации

Пример 1: Изчислете дюрацията на четиригодишна облигация с номинал 1000 лв., купон 8% и доходност до падежа в размер на 11%.

☺Решение:

$$D = \frac{\frac{1 \times 80}{(1+0,11)} + \frac{2 \times 80}{(1+0,11)^2} + \frac{3 \times 80}{(1+0,11)^3} + \frac{4 \times 1080}{(1+0,11)^4}}{\frac{80}{(1+0,11)} + \frac{80}{(1+0,11)^2} + \frac{80}{(1+0,11)^3} + \frac{1080}{(1+0,11)^4}} = 3,55 \text{ години}$$

Пример 2: Определете цената на четиригодишна облигация с номинал 1000 лв., купон 4% и изискуема възвръщаемост на инвеститора в размер на 7%.

☺Решение:

$$P_0 = \frac{40}{(1+0,07)} + \frac{40}{(1+0,07)^2} + \frac{40}{(1+0,07)^3} + \frac{1040}{(1+0,07)^4} = 898,38 \text{ лв.}$$

Пример 3: Каква цена бихте платили за 10-годишна облигация с номинал 1000 лв., купонна доходност от 4% и изискуема възвръщаемост в размер на 10%?

☺Решение: При оценяване на облигации с еднакъв абсолютен размер на купонните плащания можем значително да редуцираме необходимите калкулации, ако използваме сегашната стойност на анюитет, вместо дисконтираме на всеки един паричен поток поотделно:

$$P_0 = C \times \left[\frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{r} \right] + \frac{M}{(1+r)^n}$$

$$P_0 = 40 \times ((1 - (1/(1+0,1)^{10})) / (0,1)) + 1000 / (1+0,1)^{10} = 631,33 \text{ лв.}$$

Пример 4: Изчислете доходността до падежа на облигация с пазарна цена от 103 лв., номинал 100 лв., купонна доходност от 5% и срок до падежа 3 години.

Доходност до падежа – IRR. Методологията за изчисляване на доходността до падежа е идентична с тази, необходима за намирането на вътрешната норма на

възвръщаемост при оценката на инвестиционните проекти. Тук обаче имаме ориентир за очакваната стойност: **ако текущата пазарна цена на облигацията (P) е по-висока от номиналната (M), то доходността до падежа (IRR;R) е по-ниска от купонната доходност (C%).** Разбира се, в противоположния случай: ако текущата пазарна цена на облигацията е по-ниска от номиналната, то доходността до падежа е по-висока от купонната доходност.

Следователно:

Ако $P > M \Rightarrow IRR < C\%$;

Ако $P < M \Rightarrow IRR > C\%$;

Ако дисконтовият процент = $C\% \Rightarrow NPV = M - P_0$.

☺ **Решение:** $P > M \Rightarrow IRR < C\% = IRR < 5\%$:

$$NPV_{3\% (a)} = \frac{5}{(1+0,03)} + \frac{5}{(1+0,03)^2} + \frac{105}{(1+0,03)^3} - 103 = 2,657 \text{ лв. (A)}$$

$$NPV_{4\% (c)} = \frac{5}{(1+0,04)} + \frac{5}{(1+0,04)^2} + \frac{105}{(1+0,04)^3} - 103 = -0,225 \text{ лв. (C)}$$

$$\frac{A}{A-C} = \frac{x}{c-a} \Rightarrow \frac{2,657}{2,657 - (-0,225)} = \frac{x}{0,04 - 0,03} \Rightarrow x = 0,00922$$

$$\underline{IRR(b)} = a + x = 0,03 + 0,00922 = 3,92\%$$

Пример 5: Изчислете доходността до падежа на облигация с пазарна цена от 98 лв., номинал 100, купонна доходност от 8% и срок до падежа 3 години.

☺ **Решение:** $P < M \Rightarrow IRR > C\% = IRR > 8\%$:

$$NPV_{8\%=c\% (a)} = M - P = 100 - 98 = 2 \text{ (A)}$$

$$NPV_{9\% (c)} = \frac{8}{1,09} + \frac{8}{1,09^2} + \frac{108}{1,09^3} - 98 = -0,531 \text{ (C)}$$

$$\frac{A}{A-C} = \frac{x}{c-a} \Rightarrow \frac{2}{2 + 0,531} = \frac{x}{0,09 - 0,08} \Rightarrow x = 0,79\%$$

$$R(IRR) = a + x = 0,08 + 0,0079 = 8,79\%$$

Пример 6: Изчислете доходността до падежа на облигация с пазарна цена от 105 лв., номинал 100, купонна доходност от 8% и срок до падежа 3 години.

☺Решение: $P > M \Rightarrow IRR < C\% = IRR < 8\%$:

$$NPV_{6\%(a)} = \frac{8}{1,06} + \frac{8}{1,06^2} + \frac{108}{1,06^3} - 105 = 0,346 (A)$$

$$NPV_{7\%(c)} = \frac{8}{1,07} + \frac{8}{1,07^2} + \frac{108}{1,07^3} - 105 = -2,376 (C)$$

$$\frac{A}{A-C} = \frac{x}{c-a} \Rightarrow \frac{0,346}{0,346+2,376} = \frac{x}{0,07-0,06} \Rightarrow x = 0,127\%$$

$$R(IRR) = a + x = 0,06 + 0,00127 = 6,13\%$$

Пример 7: Изчислете спот лихвения процент – r_3 на 3-годишна облигация с пазарна цена от 105 лв., номинал 100, купонна доходност от 8% и спот лихвени проценти: $r_1=3\%$, $r_2=6\%$.

☺Решение:

$$r_T = \sqrt[T]{\frac{(C+M)}{Po - \left(\frac{C}{(1+r_1)} + \frac{C}{(1+r_2)^2} + \dots + \frac{C}{(1+r_{T-1})^{T-1}} \right)}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{108}{105 - \left(\frac{8}{1,03} + \frac{8}{1,06^2} \right)}} - 1 = 6,22\%$$

Пример 8: Изчислете спот лихвения процент – r_3 от 3-годишна облигация, която се котира на 103,23% от номинала, с купонна доходност от 5%. Спот лихвените проценти на едногодишните и двугодишните облигации са съответно 2,8% и 2,5%.

☺Решение:

$$r_T = \sqrt[3]{\frac{(105)}{103,23 - \left(\frac{5}{(1+0,028)} + \frac{5}{(1+0,025)^2} \right)}} - 1 = 3,9\%$$

Пример 9: Изчислете форуърд лихвения процент за третата година (${}_2f_3$), ако $r_2 = 6\%$, а $r_3 = 6,22\%$.

☺Решение:

$${}_{t-1}f_t = \frac{(1+r_t)^t}{(1+r_{t-1})^{t-1}} - 1 = \frac{1,0622^3}{1,06^2} - 1 = 6,66\%.$$

Пример 10: Изчислете форуърд лихвения процент за шестата година (${}_5f_6$), ако $r_5 = 3\%$, а $r_6 = 3,4\%$.

☺Решение:

$${}_5f_6 = \frac{(1+0,034)^6}{(1+0,03)^5} - 1 = 5,4\%$$

Пример 11: Изведете доходността до падежа, спот и форуърд лихвените проценти от следните облигации с номинал 100 лв.:

Облигация	падеж (години)	купон	Цена (лв.)
a)	1	3%	100,52
b)	2	4%	101,12
c)	3	6%	103
d)	4	6%	105
e)	5	7%	104

☺Решение:

M=	100				
C%=	3%	4%	6%	6%	7%
Tsm	1	2	3	4	5
	-100.52	-101.12	-103	-105	-104
	103	4	6	6	7
		104	6	6	7
CF			106	6	7
				106	7
					107
R(IRR)=	2.47%	3.41%	4.90%	4.60%	6.05%
r=	2.47%	3.43%	5.01%	4.66%	6.32%
f=	2.47%	4.40%	8.25%	3.60%	13.26%

Пример 12: Изведете доходността до падежа, спот и форуърд лихвените проценти от следните облигации с номинал 100 лв.:

Облигация	падеж (години)	купон	Цена (лв.)
a)	1	4%	99,82
b)	2	5%	100,12
c)	3	6%	98
d)	4	6%	95
e)	5	7%	94

☺Решение:

M=	100				
C%=	4%	5%	6%	6%	7%
Tsm	1	2	3	4	5
	-99.82	-100.12	-98	-95	-94
	104	5	6	6	7
		105	6	6	7
CF			106	6	7
				106	7
					107
R(IRR)=	4.19%	4.94%	6.76%	7.49%	8.52%
r=	4.19%	4.95%	6.89%	7.67%	8.86%
f=	4.19%	5.73%	10.87%	10.03%	13.77%

V. Портфейлна теория

Пример 1: Според теорията на Х. Марковиц какъв е рискът и доходността на портфейл, съставен от следните активи:

Актив	Доходност (r_i)	Риск (σ_i^2)	Ковариация	Тегло (w_i)
X	0,12	0,0014	0,0054	60 %
Y	0,24	0,0035		40 %

☺Решение:

$$E(r_p) = 0,12 \times 0,6 + 0,24 \times 0,4 = 16,80\%$$

$$\sigma_p^2 = 0,6^2 \times 0,0014 + 0,4^2 \times 0,0035 + 2 \times 0,6 \times 0,4 \times 0,0054 = 0,3656\%$$

$$\sigma_p = 0,003656^{0,5} = 6,05\%$$

Пример 2: Според теорията на Х. Марковиц какъв е рискът и доходността на портфейл, съставен от следните активи:

Актив	Доходност (r_i)	Риск (σ_i^2)	Корелация	Тегло (w_i)
X	-0,012	0,022	0.621	58%
Y	0,028	0,0215		42%

☺Решение:

$$E(r_p) = -0,012 \times 0,58 + 0,028 \times 0,42 = 0,48\%$$

$$\sigma_p^2 = 0,58^2 \times 0,022 + 0,42^2 \times 0,0215 + 2 \times 0,58 \times 0,42 \times 0,621 \times 0,022^{0,5} \times 0,0215^{0,5} = 1,78\%$$

$$\sigma_p = 1,78\%^{0,5} = 13,33\%$$

Пример 3: Изчислете очаквания доход и риск на триактивния портфейл XYZ, имащ следните параметри:

Актив	Тегло (w_i)	Доходност (r_i)	Риск (σ_i^2)	Вариационно-ковариационна матрица		
				X	Y	Z
X	25%	0,23	0,034	0,034	<u>0.004</u>	<u>0.007</u>
Y	35%	0,03	0,026		0,026	<u>0.027</u>
Z	40%	0,023	0,02			0,02

☺Решение:

$$E(r_p) = 0,25 \times 0,23 + 0,35 \times 0,03 + 0,4 \times 0,023 = 0,0772 \text{ (7,72\%)}$$

$$\sigma_p^2 = w_X^2 \sigma_X^2 + w_Y^2 \sigma_Y^2 + w_Z^2 \sigma_Z^2 + 2w_X w_Y \text{cov}(r_X, r_Y) + 2w_X w_Z \text{cov}(r_X, r_Z) + 2w_Y w_Z \text{cov}(r_Y, r_Z)$$

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= 0,25^2 \times 0,034 + 0,35^2 \times 0,026 + 0,4^2 \times 0,02 + \\ &+ 2 \times 0,25 \times 0,35 \times 0,004 \\ &+ 2 \times 0,25 \times 0,4 \times 0,007 \\ &+ 2 \times 0,35 \times 0,4 \times 0,027 = 0,01817 \\ \Rightarrow \sigma &= 13,48\% \end{aligned}$$

Пример 4: Изчислете очаквания доход и риск на портфейлите сред възможните двуактивни портфейли (AB, AC и BC), при равни тегла на активите:

Акция	Доходност, %	Дисперсия, %	Ковариация		
			А	В	С
А	6	8	0,08	0,0041	0,0057
В	8	12		0,12	0,011
С	14	15			0,15

☺Решение: два актива с равни тегла $\Rightarrow w_1$ и w_2 са рани на 50%. Отг.:

	AB	AC	BC
E(rp)=	7,00%	10,00%	11,00%
$\sigma^2 p =$	0,052	0,060	0,073
$\sigma =$	22,81%	24,57%	27,02%

Пример 5: Изчислете очаквания доход и риск на портфейлите сред възможните двуактивни портфейли (FT, KF и ТК), при равни тегла на активите:

Актив	Доходност (r _i)	Риск (σ ² _i)	Корелационна матрица		
			F	T	K
F	15%	12%	1	0,13	-0,38
T	24%	18%		1	0,56
K	4%	7%			1

☺Решение:

	FT	FK	TK
E(rp)=	19,50%	9,50%	14,00%
$\sigma^2 p =$	0,085	0,030	0,094
$\sigma =$	29,08%	17,35%	30,65%

Пример 6: Изчислете риска и доходността двуактивен портфейл (XY) при равни тегла на активите. Разполагате с историческите цени на акциите, влизащи в състава на портфейла през последните шест години:

Година, t	Цена затваря (X)	Цена затваря (Y)
1	1,23 лв.	8,23 лв.
2	1,27 лв.	8,24 лв.
3	2,77 лв.	8,13 лв.
4	2,34 лв.	6,76 лв.
5	3,15 лв.	9,50 лв.
6	3,45 лв.	10,11 лв.

☺**Решение:** За да изчислим риска и доходността на портфейл, при налични исторически цени на активите, използваме следната последователност от стъпки:

1. Извеждаме възвръщаемостта на активите и очакваната им доходност:

Price X	Price Y	r_x	r_y
1,23	8,23	-	-
1,27	8,24	3,25%	0,12%
2,77	8,13	118,11%	-1,33%
2,34	6,76	-15,52%	-16,85%
3,15	9,5	34,62%	40,53%
3,45	10,11	9,52%	6,42%

Възвръщаемостта за всеки от периодите изчисляваме по формулата $r_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1$

За очакваната доходност на активите приемаме средноаритметичната стойност на историческата им възвръщаемост:

$$E(\bar{r}_x) = (0,03252 + 1,1811 + -0,15523 + 0,34615 + 0,09523)/5 = 0,29996$$

$$E(\bar{r}_y) = (0,00122 + -0,01335 + -0,16851 + 0,40533 + 0,06421)/5 = 0,05778$$

2. Изчисляваме индивидуалния риск на активите и ковариацията на тяхната доходност:

r_x	r_y	$r_x - \bar{r}_x$	$r_y - \bar{r}_y$	$(r_x - \bar{r}_x)^2$	$(r_y - \bar{r}_y)^2$	$(r_y - \bar{r}_y)(r_x - \bar{r}_x)$
3,25%	0,12%	-0,267	-0,057	0,072	0,003	0,015
118,11%	-1,33%	0,881	-0,071	0,776	0,005	-0,063
-15,52%	-16,85%	-0,455	-0,226	0,207	0,051	0,103
34,62%	40,53%	0,046	0,348	0,002	0,121	0,016
9,52%	6,42%	-0,205	0,006	0,042	0,000	-0,001
$\bar{r}_x = 0,29996$	$\bar{r}_y = 0,05778$	-	-	$\Sigma 1,0992$	$\Sigma 0,1803$	$\Sigma 0,0702$

При извадкови данни формулата за риска (дисперсията) приема вида:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{t=1}^n [r_t - E(r_t)]^2}{n-1}$$

$$\Rightarrow \sigma^2_x = 1,0992/4 = 0,274796;$$

$$\Rightarrow \sigma^2_y = 0,1803/4 = 0,045074.$$

Ковариацията между доходностите на двойката акции е равна на:

$$\text{Cov}(r_x, r_y) = \frac{\sum_{t=1}^n (r_{x,t} - \bar{r}_x)(r_{y,t} - \bar{r}_y)}{n-1},$$

$$\Rightarrow \text{Cov}(r_x, r_y) = 0,0702/4 = 0,01755$$

3. Изчисляваме риска и доходността на портфейла:

$$E(r_p) = 0,5 \times 0,29996 + 0,5 \times 0,05778 = 17,89\%$$

$$\sigma^2_p = 0,5^2 \times 0,274796 + 0,5^2 \times 0,045074 + 2 \times 0,5 \times 0,5 \times 0,01755 = 0,08874$$

VI. Опции

Пример 1: Изчислете вътрешната стойност и нетната печалба/загуба на издателя и купувача на следните опции:

-кол-опция, цена на упражняване= 50 лв., премия (цена)= 5 лв.;

-пут-опция, цена на упражняване= 60 лв., премия (цена)= 7 лв.;

При следната динамика на цените на базовите активи:

Цена (лв.)	CALL				PUT			
	LC		SC		LP		SP	
	Iv	Np	Iv	Np	Iv	Np	Iv	Np
30								
35								
40								
45								
50								
55								
60								
65								
70								
80								
90								

Забележка: Iv –вътрешна стойност; Np- нетна печалба/загуба; LC – дълга кол-позиция; SC – къса кол-позиция; LP – дълга пут-позиция, SP – къса пут-позиция.

☺Решение:

Цена, лв.	Call				Put			
	LC		SC		LP		SP	
	Iv	Np	Iv	Np	Iv	Np	Iv	Np
30	0	-5	0	5	30	23	30	-23
35	0	-5	0	5	25	18	25	-18
40	0	-5	0	5	20	13	20	-13
45	0	-5	0	5	15	8	15	-8
50	0	-5	0	5	10	3	10	-3
55	5	0	5	0	5	-2	5	2
60	10	5	10	-5	0	-7	0	7
65	15	10	15	-10	0	-7	0	7
70	20	15	20	-15	0	-7	0	7
80	30	25	30	-25	0	-7	0	7
90	40	35	40	-35	0	-7	0	7

Пример 2: Европейските кол-опции върху акциите на компанията „XY“, имащи цена на упражняване от 58 EUR и падеж след 6 месеца се търгуват по 3 EUR. Текущата цена на акциите на „XY“ е 59 EUR, а безрисковата доходност в икономиката е 3%. Каква е стойността на пут-опция издадена върху акциите на „XY“, при същата цена на упражняване и срок до падежа?

☺**Решение:**

$$V_p + V_s = V_c + XP \times B_t,$$

$$\Rightarrow V_p = V_c + XP \times B_t - V_s$$

където:

$$B_t = e^{-rf \times t}$$

Времето до падежа (t) се измерва в години $\Rightarrow t_{6m}=0,5$, $V_c= 3$, $XP= 58$, $V_s=59$:

$$\Rightarrow B_t = 2,718281828459^{(-0,03 \times 0,5)} = 0,98511194,$$

$$\Rightarrow V_p = 3 + 58 \times 0,98511194 - 59 = 1,1365 \text{ EUR}$$

Пример 3: Позовавайки се на биномния модел, оценете европейска пут-опция със следните параметри:

- текуща цена на базова акция – 20 лв.;
- цена на упражняване – 25 лв.;
- време до падежа (t) – 3 месеца;
- волатилитет на базовия актив (σ) – 18 %;
- дивидент – 7%;
- безрисков лихвен процент – 1,5%.

☺**Решение:**

Оценяването на пут-опция чрез биномния модел може да се осъществи чрез следната последователност стъпки:

1. Изчисляваме темпа на растеж (u) и темпа спад (d):

$$u = e^{\sigma \sqrt{t}} = 2,718281828459^{(0,18 \times 0,08333 \sqrt{0,5})} = 1,05334$$

$$d = \frac{1}{u} = 1/1,05334 = 0,94937$$

2. Калкулиране на очакваните цени съобразно темпа на растеж и спад:

$$\begin{aligned} P_u &= 20 \times 1,05334 = 21,0667, & P_d &= 20 \times 0,94937 = 18,9873, \\ P_{uu} &= 21,0667 \times 1,05334 = 22,1903, & P_{ud} &= 21,0667 \times 0,94937 = 20, \\ P_{dd} &= 18,9873 \times 0,94937 = 18,0259, & P_{uuu} &= 22,1903 \times 1,05334 = 23,3738, \\ P_{uud} &= 22,1903 \times 0,94937 = 21,0667, & P_{udd} &= 20 \times 0,94937 = 18,9873; \\ P_{ddd} &= 18,0259 \times 0,94937 = 17,1132. \end{aligned}$$

Стойностите на очакваните цени по редовете на биномната решетка са равни, защото броят увеличения на цената е равен на броя намаления.

0	1	2	3
			23,3738
		22,1903	
	21,0667		21,0667
20,00		20,0000	
	18,9873		18,9873
		18,0259	
			17,1132

3. Изчисляване на очакваните стойности на опцията:

Започваме с калкулация на вероятността за растеж (p) и спад (p-1).

$$p = \frac{e^{(r_f - \text{div})t} - d}{u - d} \Rightarrow p = [2,718281828459^{((0,015 - 0,07) \times 0,08333)} - 0,94937] / [1,05334 - 0,94937] = 0,443$$

За очаквани стойности на европейска стил опция, при отделните сценарии при падежа, се приема вътрешната стойност на опцията в този момент (третия месец).

$$I_{V_{uuu}} = 25 - 23,3738 = 1,6262, \quad I_{V_{uud}} = 25 - 21,0667 = 3,9333, \quad I_{V_{udd}} = 25 - 18,9873 = 6,0127, \\ I_{V_{ddd}} = 25 - 17,1132 = 7,8868.$$

С получените очаквани стойности към падежа, започва изчисляването на прогнозните (справедливите) цени на опцията за предходните периоди, докато се стигне до текущия момент:

$$V_{Pu}(t-1) = e^{-r_f t} (pV_{Pu}(t) + (1-p)V_{Pd}(t))$$

$$V_{P_{uu}} = 2,71828182^{(-0,015 \times 0,08333)} \times [1,62617 \times 0,443030 + 3,9333 \times (1 - 0,44303)] = 2,9075;$$

$$V_{P_{ud}} = 2,71828182^{(-0,015 \times 0,08333)} \times [3,9333 \times 0,443030 + 6,0127 \times (1 - 0,44303)] = 5,0851$$

$$V_{P_{dd}} = 2,71828182^{(-0,015 \times 0,08333)} \times [6,0127 \times 0,443030 + 7,8868 \times (1 - 0,44303)] = 7,0477$$

$$V_{Pu} = 2,71828182^{(-0,015 \times 0,08333)} \times [2,9075 \times 0,443030 + 5,0851 \times (1 - 0,44303)] = 4,1152$$

$$V_{Pd} = 2,71828182^{(-0,015 \times 0,08333)} \times [5,0851 \times 0,443030 + 7,0477 \times (1 - 0,44303)] = 6,1705$$

$$V_P = 2,71828182^{(-0,015 \times 0,08333)} \times [4,1152 \times 0,443030 + 6,1705 \times (1 - 0,44303)] = \underline{5,2534} \text{ лв.}$$

0	1	2	3
			1,6262
		2,9075	
	4,1152		3,9333
5,2534		5,0851	
	6,1705		6,0127
		7,0477	
			7,8868

Пример 3: Използвайки модела Блек-Скоулс оценете пут-опция върху акция със следните параметри:

- текуща цена на акцията (S) 55 лв.;
- цена на упражняване (X) 50 лв.;
- падеж на опцията– след 3 месеца (t = 3/12);
- безрисков лихвен процент(r_f) 7,7%;
- волатилитет (σ) 25%;

☺Решение:

$$d_1 = \frac{\ln(Ps / XP) + (rf + 0.5 \times \sigma^2) \times t}{\sigma \times \sqrt{t}}$$

$$\Rightarrow d_1 = [\ln(55/50) + (0,077 + 0,5 \times 0,25^2) \times 0,25] / [0,25 \times 0,25^{0,5}] = 0,97898144$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{t}$$

$$\Rightarrow d_2 = 0,97898144 - (0,25 \times 0,25^{0,5}) = 0,853981438$$

Чрез приложение №1 от получените резултати извеждаме N(d₁) и N(d₂):

$$N(d_1) = (0,97898144) \approx 0,8365 \quad N(d_2) = (0,853981438) \approx 0,8023$$

$$V_{Call} = Ps \times N(d_1) - XP \times e^{-rf \times t} \times N(d_2)$$

$$\Rightarrow V_{call} = (55 \times 0,8365) - (50 \times 2,7182818^{(-0,077 \times 0,25)}) \times 0,8023 = 6,6573 \text{ лв.}$$

$$V_{Put} = V_{Call} - Ps + XP \times e^{-rf \times t}$$

$$\Rightarrow V_{put} = 6,6573 - 55 + (50 \times 2,7182818^{(-0,077 \times 0,25)}) = 0,704 \text{ лв.}$$

Приложение №1 Кумулативна функция на стандартното Гаусово разпределение

Z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	0,9997

Забележка: стойностите в таблицата са генерирани с функцията на MS Excel NORM.S.DIST(;TRUE)